Задание № 7 Определенный интеграл

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

М22.1.2 Определение. Пусть на промежутке  задана ограниченная функция  (необязательно неотрицательная). Поделим отрезок  точками  на части. Для определенности и однообразия обозначений будем считать, что ,  и . Длину отрезка  обозначим . Выберем на каждом промежутке  произвольную точку  и составим сумму . Если существует конечный предел , не зависящий от выбора точек , то этот предел называется *определенным интегралом* от функции  на промежутке  и обозначается :



Функция  при этом называется *интегрируемой* на промежутке .

22.4 Свойства интегрируемых функций

М22.4.1 Теорема (свойства интегрируемых функций) 1) Если функция  интегрируема на промежутке , то для любого числа  функция  также интегрируема на этом промежутке и при этом

.

2)Если функции  и интегрируемы на промежутке , то на этом же промежутке интегрируемы сумма и разность этих функций и при этом 

3)Если функция  интегрируема на промежутке  и , то эта функция интегрируема на промежутке .

22.5 Свойства определенных интегралов

М22.5.1 (Изменение направления интегрирования)

Ранее предполагалось, что в записи  имеет место неравенство .

Допустим теперь, что . Поделим отрезок  на части точками  и обозначим . Поскольку , то и, следовательно, .

М1.5.2 *Следствие.* Допустим, что . Тогда из равенства  следует, что .

М22.5.3 Аддитивность интеграла Для любых чисел  верно равенство при условии, что функция  интегрируема в большем из промежутков , , :



М22.5.4 Неотрицательность интеграла

Если во всех точках промежутка , то ;

Справедливость этого неравенства следует теоремы о пределе и неравенствах.

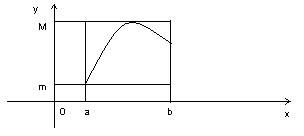
М22.5.5 Если  во всех точках промежутка , то ;

М22.5.6 *Следствие.* Если  во всех точках промежутка , то  и если  во всех точках промежутка , то .

Для доказательства можно рассмотреть функцию  и воспользоваться М22.5.4 и М22.5.5.

М22.5.7 Оценка интеграла Если во всех точках промежутка  верно равенство , то . Следует из свойств сумм Дарбу.

Если , то неравенство  выражает следующий факт: площадь криволинейной трапеции заключена между площадями двух прямоугольников (Рис).



22.6 Интеграл с переменным верхним пределом

Если в интеграле  менять значение числа , то данный интеграл будет принимать различные значения. Таким образом, интеграл  является функцией своего верхнего предела .

М22.6.1 Определение: *Интегралом с переменным верхним пределом* называется функция .

М22.6.2 Теорема (свойства интеграла с переменным верхним пределом)

1. Если функция  интегрируема на промежутке , то функция  непрерывна на промежутке .
2. Если функция  непрерывна на промежутке , то функция  дифференцируема на промежутке  и при этом .

М22.1.6 *Замечание.* Можно рассматривать также интеграл с переменным нижним пределом , для которого остается верной первая часть теоремы М1.6.2, а вторая часть будет звучать так: если функция  непрерывна на промежутке , то функция  дифференцируема на промежутке  и при этом .

22.7 Формула Ньютона-Лейбница

М22.7.1 Таким образом, из теоремы М1.6.2 следует, что функция  является первообразной функции . Если  - какая-либо первообразная функции , то найдется постоянная  такая, что . Поскольку , то  и . Полагая в этом равенстве , получим . А, поскольку , то получим *формулу Ньютона-Лейбница*:



М22.7.2 *Замечание:* для вычисления определенного интеграла достаточно найти любую первообразную функции , посчитать ее значения в точках  и  и воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница.

Примеры. 1) Вычислить интеграл 

, значит, 

2) Вычислить интеграл





М22.7.3 *Замечание.* В связи с тем, что согласно формуле Ньютона-Лейбница произвольная постоянная всегда будет уничтожаться, при вычислении определенного интеграла ее можно не писать.

22.8 Интегрирование по частям в определенном интеграле

М22.8.1 В формуле интегрирования по частям неопределенного интеграла

 обозначим , тогда по формуле Ньютона-Лейбница 

 и снова по той же формуле



М22.8.2 Пример. Вычислить интеграл 





1.9 Замена переменной в определенном интеграле

Пусть в интеграле  имеет место .

М1.9.1 Теорема (о замене переменной в определенном интеграле)

Пусть  - монотонная функция, имеющая непрерывную производную и такая, что  (или ), тогда справедливо равенство



*Доказательство:* если  - первообразная функции , то функция  - первообразная функции .

Поэтому ,



*Теорема доказана.*

М22.9.2 Примеры. 1) . Замена переменной: . При этом если , то , а если , то ; значит, 

2)

. Замена ; при этом если , то , а если , то .







3) 

Неопределенный интеграл от той же функции с помощью универсальной тригонометрической подстановки может быть приведен к виду . При  , а при  .



**Самостоятельная работа:**

14.1.3. Пользуясь таблицей интегралов и формулой Ньютона-Лейбница вычислить простейшие определенные интегралы: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) , дать геометрическую интерпретацию полученного результата; ж) ;

14.2.1. Пользуясь свойством линейности, вычислить следующие интегралы: а) ; б) ; в) ;

14.2.4. Вычислить определенные интегралы от кусочно заданных функций: а) ; б) ; в) ; г) , где ; д) , где ; е) , где  - целая часть числа ;

14.3.1 используя метод подведения под знак дифференциала с последующей заменой переменной, вычислить интегралы: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

14.3.2. используя подходящую замену переменной, вычислить интегралы: а) ; б) ; в) ;г) ;

14.4.1. . Используя метод интегрирования по частям, найти интегралы:

а) ; б) ; в) ; г) ;е) :

з) ;

14.4.2. Используя несколько раз метод интегрирования по частям, найти интегралы:

а) ; б) ; в) ;

**Ответы:**

**14.1.3.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) , площадь под осью абсцисс равна площади над осью абсцисс; ж) ;

**14.2.1.** а) 4; б) 4; в) ; **14.2.4.** а) 1; б) 0; в) 4; г) 6,; д) ;е) 6;

**14.3.1** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

**14.3.2.** а) ; б) ; в) ;г) ;

**14.4.1.** . Используя метод интегрирования по частям, найти интегралы:

а) ; б) ; в) ; г) ;е) : з) ;

**14.4.2.** а) ; б) ; в) ;